

Nutzung von DERIVE zum fächerübergreifenden Unterricht Physik - Mathematik

Dr. Johann Zöchling, BG-Berndorf, 2560 Sportpromenade 19

1. Einleitung

Jedes Verständnis von physikalischen Zusammenhängen ist mit einem gewissen Maß an Mathematisierung verbunden. Auch im AHS-Physikunterricht kann diese Notwendigkeit nicht umgangen werden. Die Fülle des Stoffes, Zeitmangel, Uninteresse der Schüler sowie Scheu des Lehrers vor physikalischen Mathematikbeispielen verhindern oft eine gründliche mathematische Behandlung der Physik.

Mit Hilfe der Computer-Algebra-Software DERIVE wurde nun versucht verschiedene Kapitel der Schulphysik mathematisch zu erfassen bzw. mathematische Ergebnisse zu visualisieren und Hand der Bilder zu interpretieren.

An einem Beispiel aus der Wärmelehre soll diese Arbeitsmethode in den nachfolgenden Kapiteln erläutert werden.

Wärmelehre und Gasdynamik zählen für Schüler im Allgemeinen zu den "langweiligen" Kapiteln der Physik. Durch die Einführung von Schülerexperimenten in den letzten Jahren, konnte das Interesse etwas gehoben werden. Die Versuche beschränken sich jedoch auf die Bestimmung von Wärmekapazitäten von Festkörpern, einfache Messungen zur Wärmeleitung sowie Wärmestrahlung. Die Gasdynamik ist nach wie vor auf das Lehrereperiment angewiesen und wird daher von den Schülern größtenteils ignoriert.

Mit Hilfe der Computer - Algebra - Software DERIVE [1] wurde nun versucht, jeden Schüler aktiv in die Behandlung der Gasdynamik einzubeziehen.

Dabei standen zwei Ziele im Vordergrund:

- a) Die Visualisierung der Zustandsgleichung des Idealen Gases
- b) Die Entwicklung einer Modellgleichung für Reale Gase

Zusätzlich sollte den Schülern der Modellcharakter physikalischer Gleichungen sowie Effektivität und Grenzen physikalisch-mathematischer Modelle nähergebracht werden.

2. Die Visualisierung der Gleichung des Idealen Gases

2.1 Theoretische Vorbereitung

Mit Hilfe der klassischen Mechanik wird in der gewohnten Form eine Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur eines Idealen Gases hergeleitet.

Man verwendet allgemein 3 Zustandsgleichungen:

- a) $pV=NkT$
- b) $pV=nRT$
- c) $pV_m=RT$

p...Druck

N...Anzahl der Moleküle in V
 T...absolute Temperatur
 k...Boltzmannkonstante
 n...Molzahl
 R...Gaskonstante
 V_m...molares Volumen

außerdem sind den Schülern die "experimentellen" Gasgleichungen bekannt:

- d) $pV = \text{konst.}$ (Boyle-Mariotte)
 e) $V = \text{konst. T}$ (Gay-Lussac)
 f) $p = \text{konst. T}$ (Jaques Charles)

Der Zusammenhang von a),b),c) mit d),e),f) ist den Schülern meistens nicht geläufig.
 Mit Hilfe von DERIVE wird nun versucht, die "kleinen" Gasgleichungen d) und f) in der "großen" Gasgleichung c) zu finden.

2.2. Vorbereitende Arbeiten mit DERIVE

Zunächst werden Funktionen der Gestalt $z=f(x,y)$ auf einem rechteckigen Bereich der xy-Ebene geplottet.

Durch Variation der Gittergröße wird den Schülern die mangelnde Genauigkeit der Darstellung klar.

Beispiel:

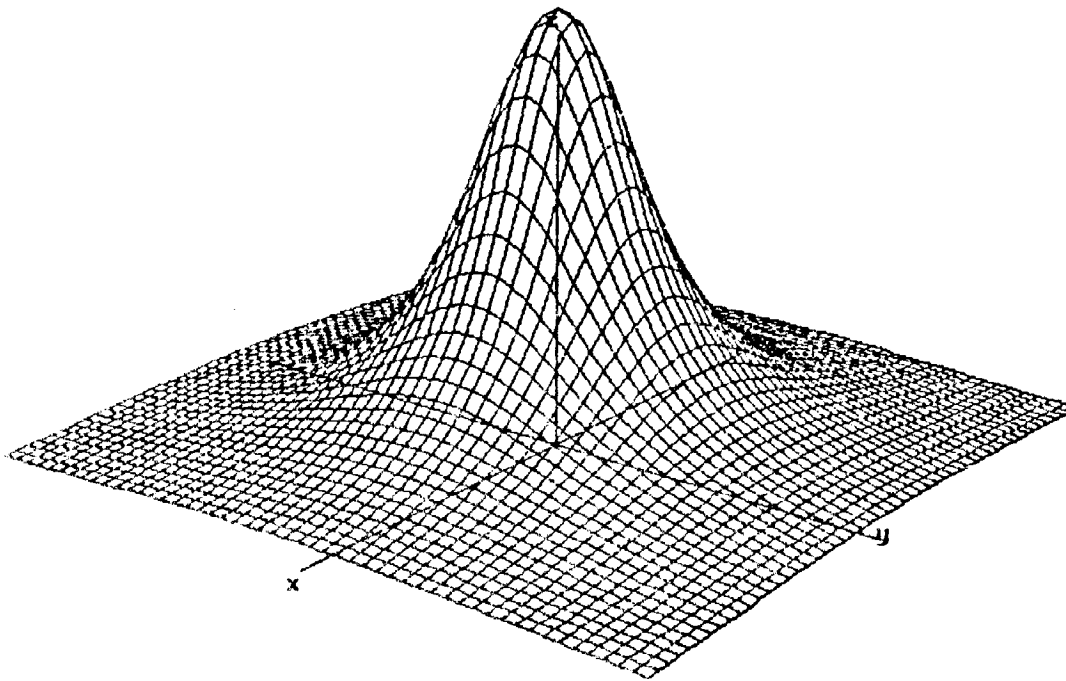
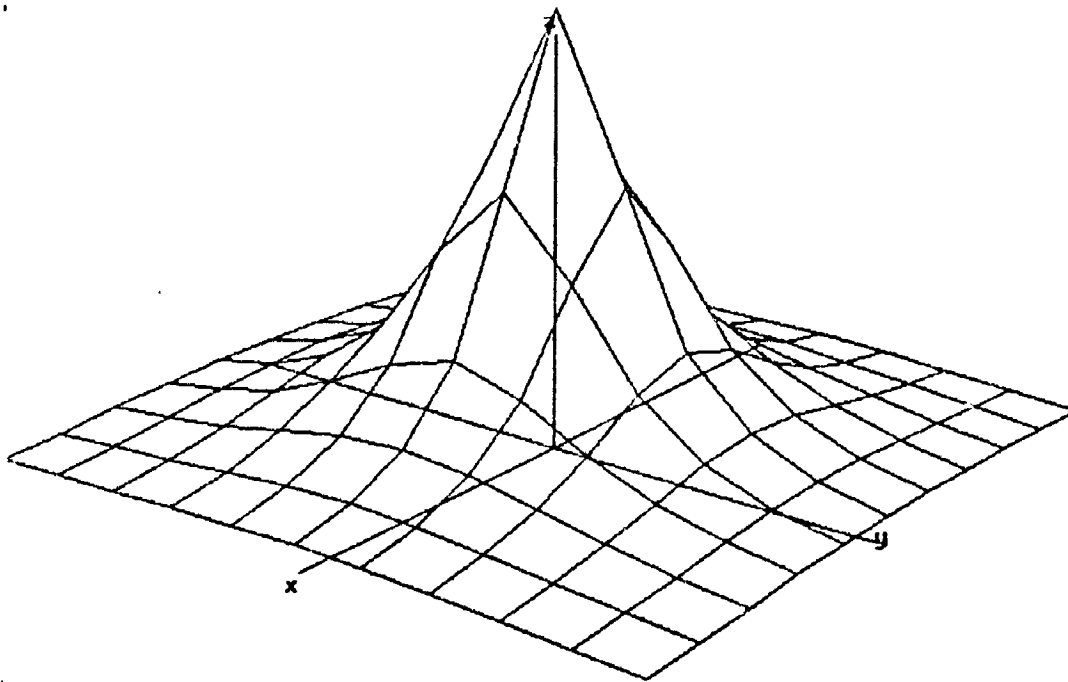
$$z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

DERIVE:

- 1) AUTHOR: $z=1/(x^2+y^2+2)$
- 2) OPTIONS: (GRAFIK aktivieren)
- 3) PLOT:
- 4) LENGTH: x:10,y:10, z:(auto)
- 5) GRIDS: x:10 (50) y:10 (50)
- 6) PLOT

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die Funktion z mit der Gitterweite 10 bzw. 50

Die Grafik wurde im VGA-Modus erstellt.



2.3 Die Zustandsgleichung des Idealen Gases

Wir verwenden die Gleichung $pV_m = RT$, wobei wir für das molare Volumen stets V schreiben. Da wir nur an einer qualitativen Betrachtung interessiert sind, wird die Gaskonstante gleich Eins gesetzt.

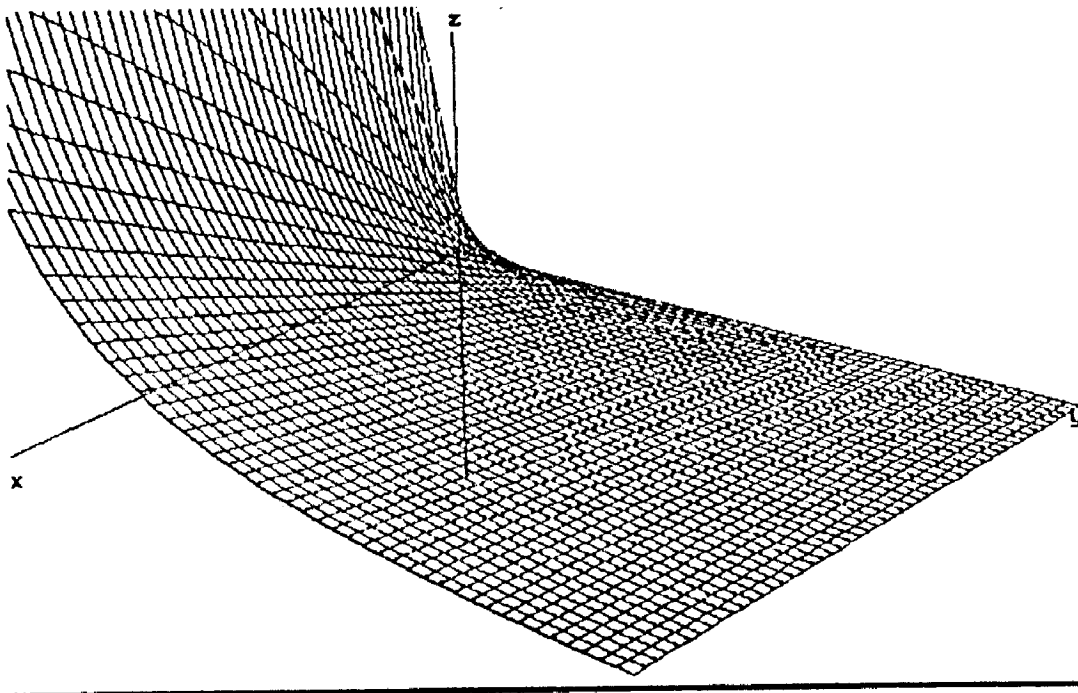
DERIVE:

```

1)AUTHOR: pv=rt
2)DECLARE:
   variable:r
   value:1
3)SOLVE:#1,variable:p
4)PLOT
5)LENGTH:10,10,10
6)CENTER:5,5,0
7)GRIDS: von 20,20 bis 50,50
8)EYE:25,20,15
9)PLOT

```

Auf dem DERIVE-Graphikschirm erhält man die nachfolgende Graphik. Die x-Achse entspricht der Temperatur, die y-Achse dem Volumen und die z-Achse dem Druck. Jeder Punkt auf dieser Fläche entspricht einem bestimmten Zustand von p-V-T des Idealen Gases. Wir nennen diese Fläche daher **Zustandsfläche**.

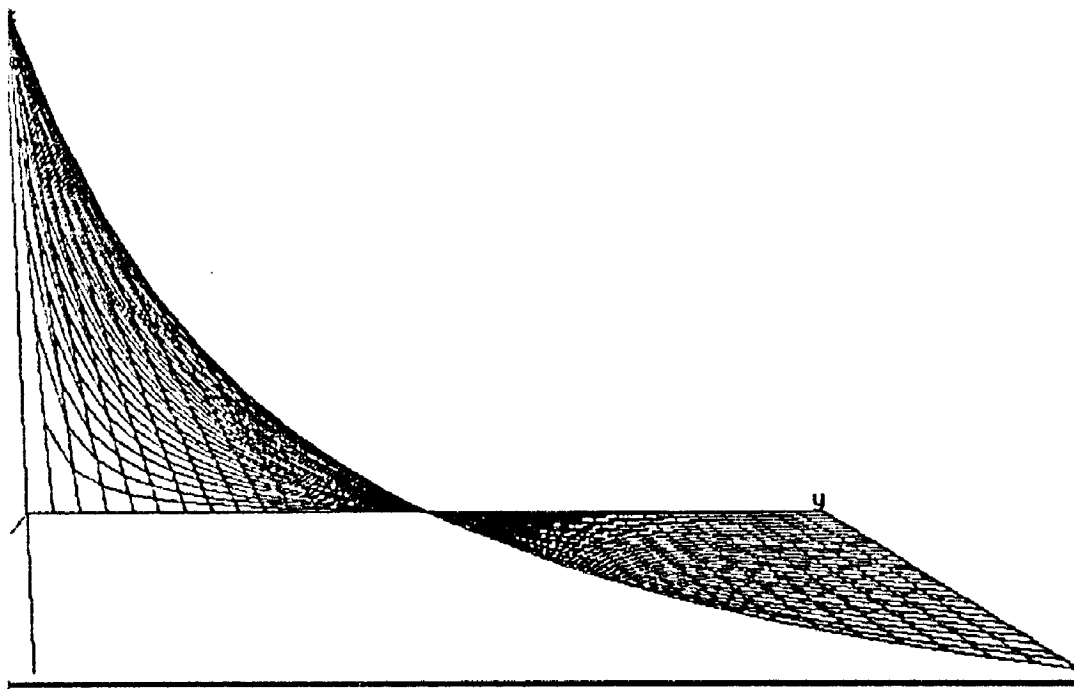


Durch mehrfache Variation des Augpunktes kann man einen genauen Eindruck von der Gestalt der Zustandsfläche erhalten.

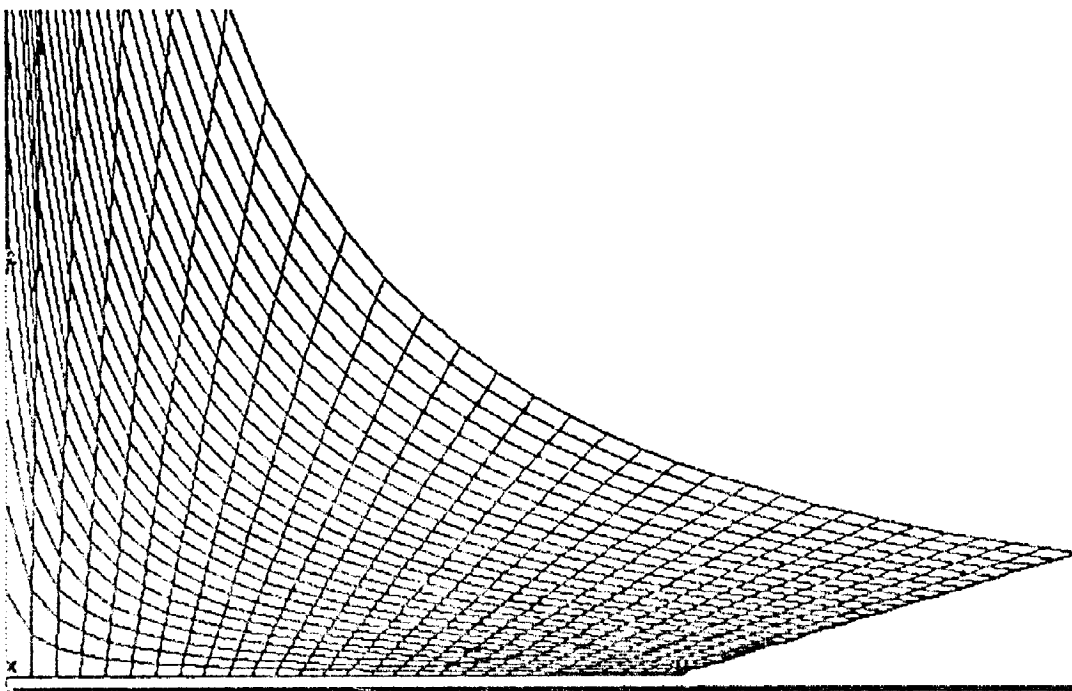
z.B.:

Blickrichtung entlang der x-Achse

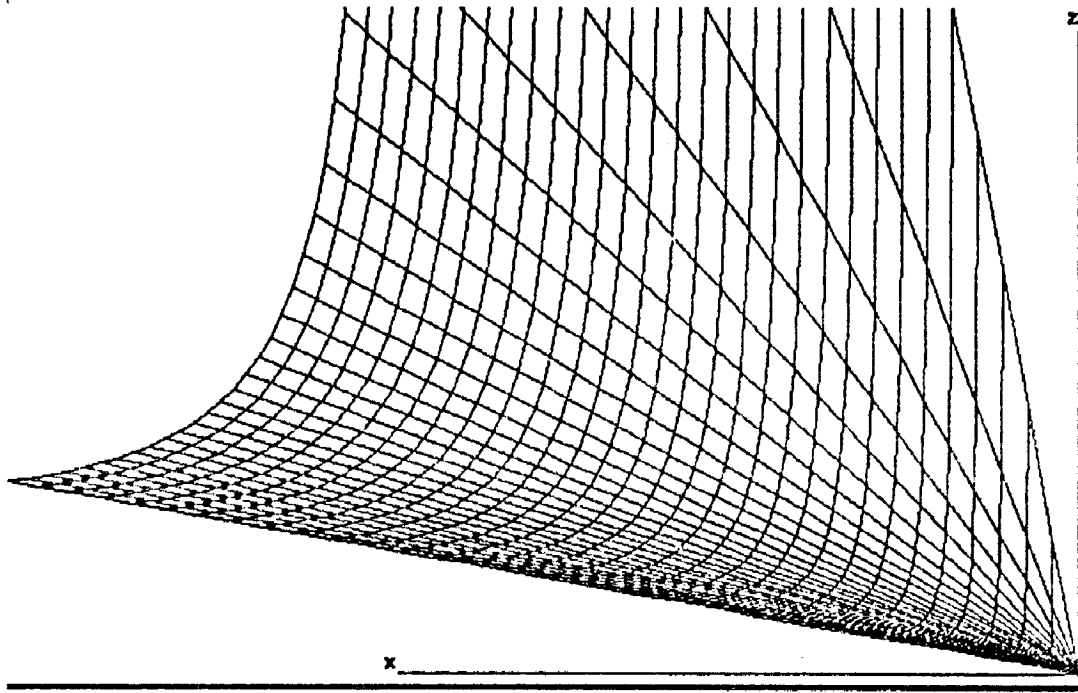
EYE:25,0,5 bis 25,5,5



Blickrichtung genau entlang der x-Achse:
EYE:25,0,0



Auf der nächsten Seite ist die Zustandsfläche mit Blickrichtung 0,25,0 (d.h. entlang der Volumsachse) dargestellt.

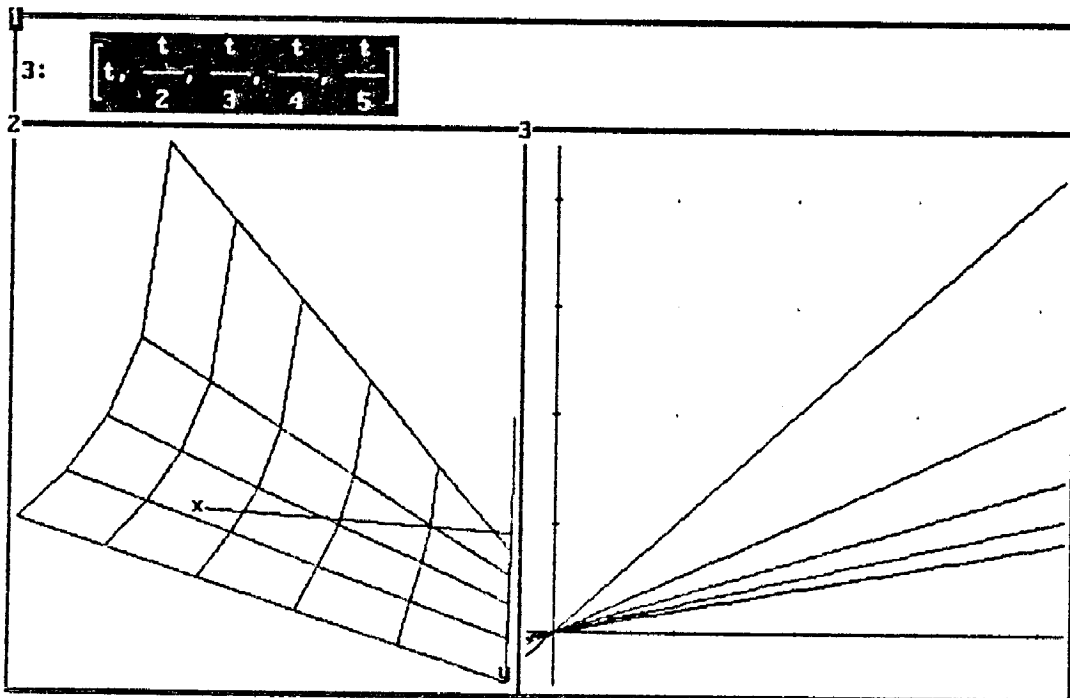
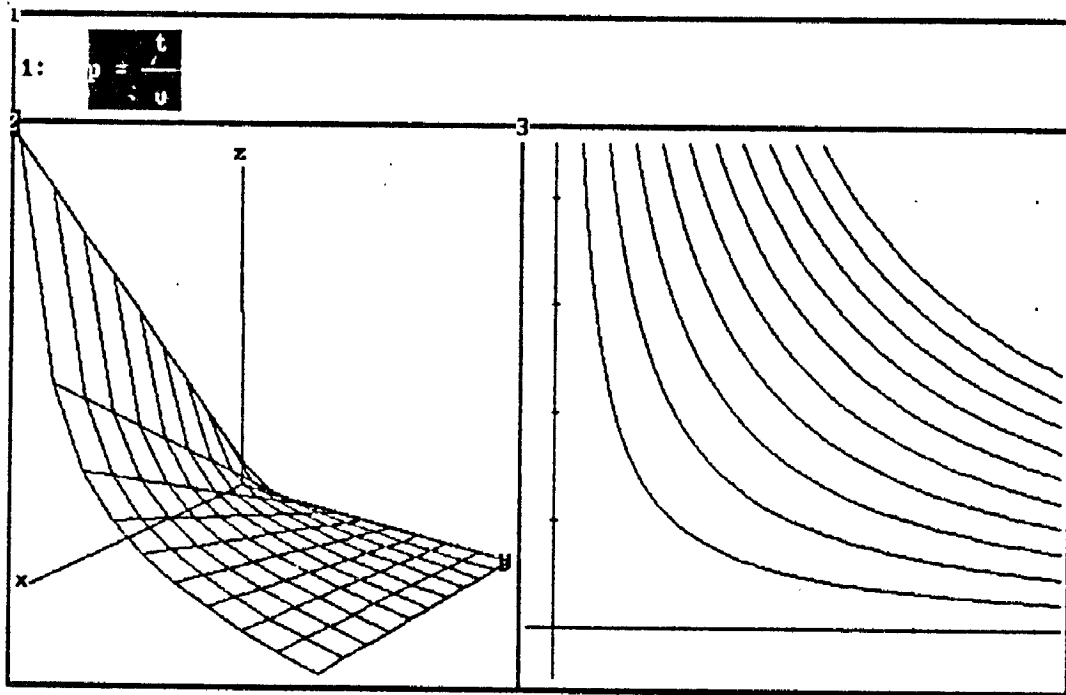


Zusammenfassung:

- a) Jede Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur ist durch einen Punkt auf der Zustandsfläche charakterisiert.
- b) Bewegt man sich entlang einer Gitterlinie parallel zur Temperaturachse ($V=\text{konst.}$), so steigt der Druck linear (\rightarrow Isochoren)
- c) Bewegt man sich entlang einer Gitterlinie parallel zur Volumsachse ($T=\text{konst.}$), so nimmt der Druck nichtlinear zu. (\rightarrow Isothermen)

Durch Projektion der Gitterlinien konstanter Temperatur auf die y - z -Ebene erhält man die Isothermen.

Durch Projektion der Gitterlinien konstanten Volumens auf die x - z -Ebene erhält man die Isochoren.



3. Eine Gleichung für reale Gase

3.1. Das Eigenvolumen der Moleküle

Es wird hier vorausgesetzt, daß der Schüler mit dem Modell des Idealen Gases bereits vertraut ist.

Für das Ideale Gas wurden zwei wesentliche Einschränkungen angenommen:

- a) Das Volumen der Gasmoleküle ist im Verhältnis zum Volumen des Gasgefäßes vernachlässigbar klein
- b) Zwischen den Molekülen gibt es keinerlei Wechselwirkung

Wir berücksichtigen zunächst das Eigenvolumen der Moleküle.

Das Eigenvolumen eines Moleküls sei v , die Summe aller Molekülvolumina sei b .

Für das Ideale Gas gilt:

$$pV = RT$$

Berücksichtigen wir das Eigenvolumen der Moleküle, so ergibt sich die verbesserte Gasgleichung zu:

$$p(V - b) = RT$$

Wir zeichnen nun mit Hilfe von DERIVE die Isothermen des korregierten Modellgases:

Eingabe:

Ausgabe auf dem Bildschirm

- a) AUTHOR: $p(V-b)=RT$
- b) DECLARE: (variable) R (value) 1
- c) DECLARE: (variable) b (value) 0.1
- d) SOLVE: #1, (variable) p

- 1: $p(V-b)=RT$
- 2: $R:= 1$
- 3: $b:= 0.1$
- 4: $p = \frac{10t}{10v - 1}$

Wir definieren nun eine Funktion für den Druck:

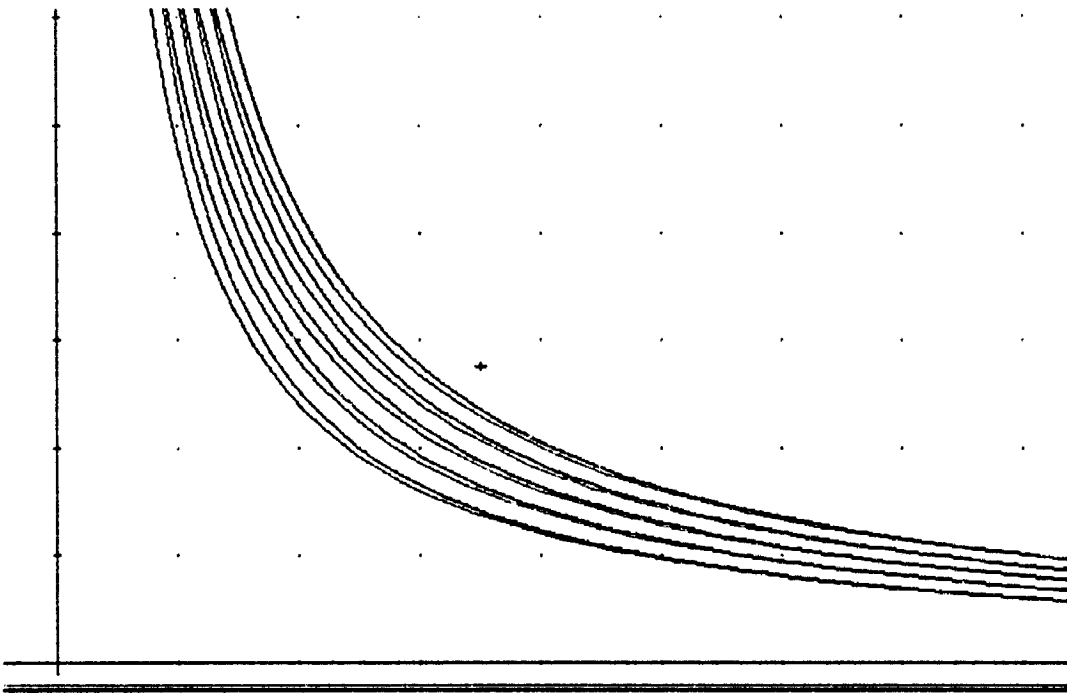
- e) DECLARE: (function) pv (value) rechte Seite von 4: markieren und mit F3 fixieren

$$5: pv(t, v) := \frac{10t}{10v - 1}$$

Mit Hilfe der Vektorooption definieren wir nun eine Isothermenschar

- f) $[pv(2.4, v), pv(2.8, v), pv(3.2, v), pv(3.6, v), pv(4, v)]$

Unter Verwendung des PLOT-Befehls können alle Isothermen gleichzeitig dargestellt werden. Zum Vergleich können die Isothermen des Idealen Gases zu den Isothermen des korregierten Gases dazugeplottet werden. (siehe Abbildung)



Wir erhalten als erstes Resultat: Berücksichtigt man das Eigenvolumen der Moleküle, so werden die Isothermen zu höheren Druckwerten verschoben, die Form der Isothermen bleibt gleich.

3.2. Molekülkräfte

Wegen der Anziehungskräfte der Moleküle wird der Druck, den das Gas auf die Gefäßwände ausübt, reduziert. Wir messen daher einen Druck, der geringer ist als der tatsächliche Druck im Innern des Gases.

Unsere Gasgleichung wird jetzt um einen Druckfaktor p' korrigiert.

$$(p + p')(V - b) = RT$$

Welche Aussagen können wir über p' machen [2] ?

Die potentielle Energie zwischen zwei Molekülen sei $E(r)$.

Die gesamte potentielle Energie, die ein Molekül spürt ergibt sich zu:

$$E_{sum} = \sum_{i=1}^{N-1} E(r_i)$$

Die Gesamtenergie E_{sum} ist unbekannt. Wir wissen nur, daß sie zur Anzahldichte des Gases proportional ist.

$$E_{sum} = \frac{N}{V} K$$

wobei K eine unbekannte Konstante ist.

Berücksichtigt man die Wechselwirkung aller Moleküle und zählt man die Wechselwirkung zwischen zwei Molekülen nur einmal, so erhält man für die gesamte potentielle Energie

$$E_{\text{sum}} = \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{V} K \approx \frac{N^2}{V} K'$$

Die Molekülkräfte bewirken daher eine Energieänderung im Gas. Diese Energieänderung bewirkt eine Druckänderung

$$p = \frac{E}{V}$$

Der Korrekturterm für den Druck ergibt sich daher zu:

$$p' = \frac{N^2}{V^2} K'$$

Beziehen wir unser Volumen wieder auf ein Mol, so erhält man:

$$p' = \frac{a}{V^2}$$

Wir erhalten somit für unsere verbesserte Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Das ist die bekannte Zustandsgleichung für Reale Gase von **Johannes Diderik van der Waals** (1837-1923).

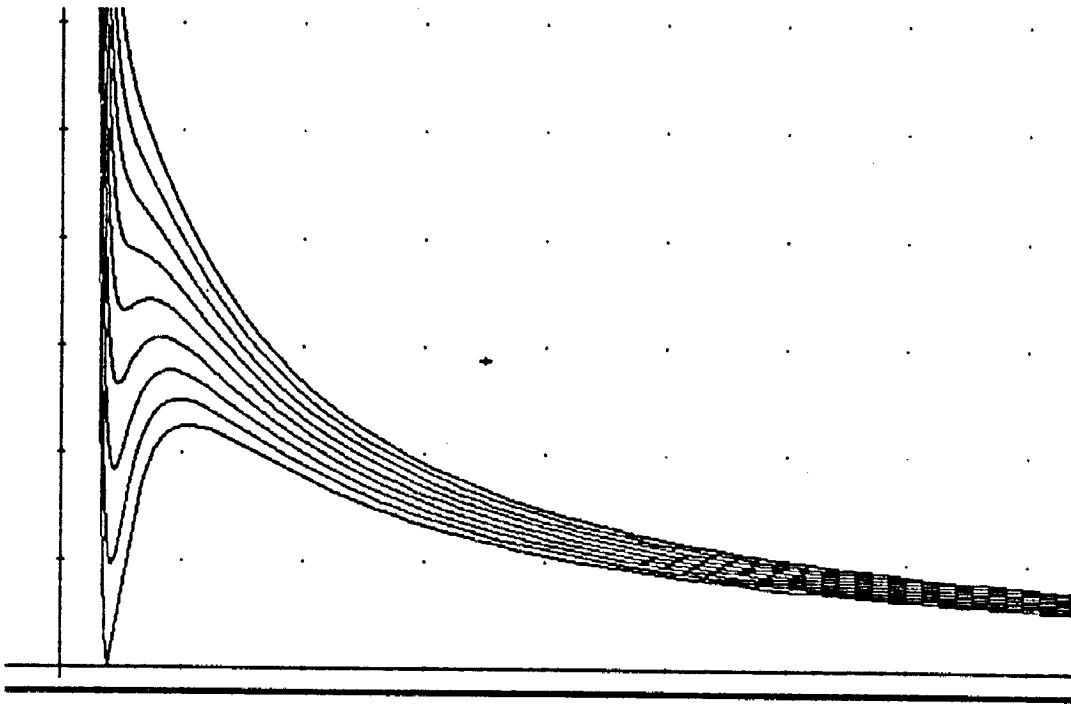
In dieser Gleichung sind a und b Konstanten, die von der Molekülsorte des Gases abhängen.

Da wir nur an einer qualitativen Untersuchung des Realen Gases interessiert sind, verwenden wir für a und b willkürliche Werte, ebenso setzen wir die Gaskonstante wieder gleich Eins.

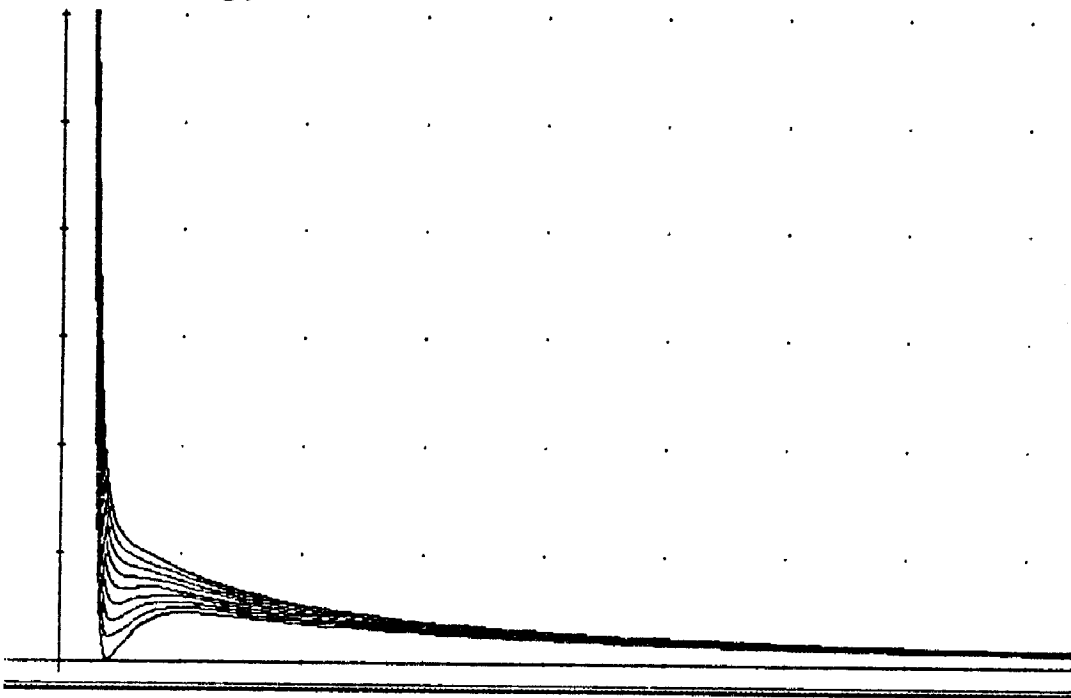
Wir verfahren wie in Kapitel 2, setzen $a=1$, $b=0.1$, definieren eine Funktion pr und erhalten schließlich auf dem Bildschirm von DERIVE:

$$pr(t, v) = \frac{10t}{10v - 1} - \frac{1}{v^2}$$

Wir definieren wieder einen Vektor für die Temperaturwerte $t=2.5, 2.6, 2.7, 2.9, 3.0, 3.1, 3.2$ und plotten die Isothermen (siehe Abbildung)



Zusätzlich werden die Isothermen mit verschiedenen Skalierungen der p -Achse gezeichnet.
(siehe Abbildung)



Wir erhalten Isothermen, die sich von den bis jetzt bekannten völlig unterscheiden, zumindest im tiefen Temperaturbereich.

4. Physikalische Interpretation der Plots

Besonders auffällig ist der starke Druckanstieg im linken Teil der Isothermen. Jede weitere Volumsverringering ist hier praktisch unmöglich, das Gas ist **inkompressibel** geworden. Der inkompressible Zustand wird aber immer mit Flüssigkeiten in Verbindung gebracht.

Wir können mit unserer Zustandsgleichung den Phasenübergang gasförmig-flüssig beschreiben.

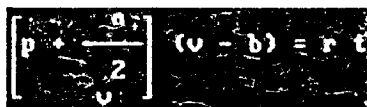
Die Maxima und Minima sind in unserem Modell unbrauchbar. In diesem Bereich kann unsere Gasgleichung die Vorgänge im Gas nicht beschreiben.

Die Isotherme mit der horizontalen Tangente nennen wir die kritische Isotherme, sie entspricht der kritischen Temperatur. Oberhalb der kritischen Temperatur tritt Verflüssigung nicht mehr ein, die Isothermen nähern sich immer mehr den Isothermen des Idealen Gases.

5. Mathematische Bestimmung der kritischen Werte von Druck, Volumen und Temperatur

Bei näherer Betrachtung der kritischen Isotherme (und vor allem durch experimentelle Unterstützung !) kann der "falsche" Bereich der Maxima und Minima als Koexistenzbereich von Flüssigkeit und Gas erkannt werden. Mathematisch gesehen stellt die kritische Isotherme eine Funktion mit einer horizontalen Wendetangente dar. Um die kritischen Werte zu bestimmen, wird zunächst der Druck als Funktion des Volumens dargestellt, mit T als Parameter. Dann berechnet man die erste und die zweite Ableitung der Funktion und setzt die Ableitungen gleich Null. Aus diesem Gleichungssystem können die kritischen Werte leicht ermittelt werden.

Die nachfolgenden Bildschirmkopien skizzieren den Weg bis zur Bestimmung der kritischen Werte für ein beliebiges reales Gas. Druck, Volumen und Temperatur werden am kritischen Punkt nur durch die atomaren Konstanten a und b bestimmt. Durch Einsetzen von fiktiven oder auch realen Werten für a und b, können die kritischen Zustandsgrößen ermittelt werden.

1: 

2: " solve "

3:
$$p = \frac{a (b - v) + r t v^2}{v^2 (v - b)}$$

1: " rechte Seite von 3: mit Pfeiltasten markieren "

3:
$$\frac{d}{dv} \frac{a (b - v) + r t v^2}{v^2 (v - b)}$$

5:
$$\frac{2a(b^2 - 2bv + v^2) - rtv^3}{v^3(b-v)^2}$$

7: "erste Ableitung wieder nach v differenzieren"

3:
$$\frac{d}{dv} \frac{2a(b^2 - 2bv + v^2) - rtv^3}{v^3(b-v)^2}$$

3:
$$\frac{2(3a(b^3 - 3b^2v + 3bv^2 - v^3) + rtv^4)}{v^4(v-b)^3}$$

10: 1. und 2. Ableitung gleich Null setzen "

11:
$$\frac{2a(b^2 - 2bv + v^2) - rtv^3}{v^3(b-v)^2} = 0$$

12:
$$\frac{2(3a(b^3 - 3b^2v + 3bv^2 - v^3) + rtv^4)}{v^4(v-b)^3} = 0$$

13: **aus Gleichung 11 t bestimmen "**

$$14: t = \frac{2 a (b^2 - 2 b v + v^2)}{r v^3}$$

15: " den Wert für t in Gleichung 12 einsetzen "

16: " das geschieht durch: 1: DECLARE t , 2: SOLVE 12 "

$$17: t := \frac{2 a (b^2 - 2 b v + v^2)}{r v^3}$$

18: v = 3 b

19: ~~v=3b ist das sogenannte kritische Volumen~~

20: aus Gleichung 17 kann leicht die kritische Temperatur berechnet werden

21: v := 3 b

$$22: t = \frac{8 a}{27 b r}$$

23: ebenso kann der kritische Druck durch Einsetzen leicht berechnet werden

$$24: t_c = \frac{8 a}{27 b r}$$

$$25: p = \frac{a}{27 b^2}$$

6. Abschlußbemerkung

Die Behandlung des Idealen sowie Realen Gases mit DERIVE wurde am BG-Berndorf bereits zweimal (Neusprachliches sowie Realistisches Gymnasium) durchgeführt. Der Zeitaufwand für das Reale Gas betrug ungefähr drei Stunden, wobei den Schülern die Grundfunktionen von DERIVE bereits bekannt waren. Maximal zwei Schüler arbeiteten an einem Computer. Die Plots wurden ausgedruckt und in das Lehrstoffheft geklebt. Einige Schüler führten noch zusätzliche Untersuchungen mit anderen Gassorten , d.h. unterschiedliches a , durch.

7. Software- und Literaturverzeichnis

[1] DERIVE, Soft Warehouse Europe, Schloss Hagenberg, A-4232 Hagenberg

[2] Ch.Kittel-H.Krömer: Physik der Wärme, S.287ff, R.Oldenbourg Verlag München Wien, 1984